Проблем осам сетова од по осам краљица на шаховској табли или Pegboard проблем

Ненад Милорадовић

Задатак. У свакој од n група налази се n жетона исте боје, при чему су жетони у различитим групама различито обојени. Потребно је жетоне распоредити на квадратној табли $n \times n$ тако да на свакој вертикали, хоризонтали и дијагонали табле сви жетони буду различитих боја. За решење овог проблема (познатог под именом **Pegboard problem**) уз услов $n = 8$ својевремено је у Америци била понуђена награда од 1 000 долара, што вероватно значи да овај подслучај нема решења. Можете ли то и да докажете?

Могућа су два решења постављеног задатка.

1 Ако тражите решење за све дијагонале у свим правцима (главне и споредне дијагонале), не постоји решење за случај $n = 8$. У овом случају ($n = 8$), поступа се аналогно решавању проблема распоређивања осам сетова од по осам краљица на истој шаховској табли при чему краљице истог сета не смеју нападати једна другу.

2 Ако тражите решење само за врсте, колоне и главне (велике) дијагонале, за $n = 8$ решење је могуће.

Приказаћемо како можете доћи до логичког решења овог проблема (за $n = 8$) без обимних нумеричких прорачуна и програмирања (компјутер је коришћен само за претраживање на Интернету).

Историја проблема

Логичка игра Hoo-Doo (постављени задатак на табли са рупицама 8×8) из 1955. године, коју је продавала Tryne Games Manufacture Inc. (Lindenhurst, L.I. New York) [1], фрустрирала је многе људе. Произвођач је понудио 1 000 америчких долара свакоме ко реши загонетку коректно! На унутрашњој страни поклопца кутије играчке, после текста инструкција, налазе се речи „Срећна ноћна мора!“ [2]. Оригинално правило игре гласи: „Све 64 рупице морају бити попуњене. Дозвољено је користити два неутрална жетона било где на табли како би се елиминисало дуплирање две боје.“ [3].

У интерпретацији овог проблема понекад није јасно да ли се мисли само на главне или на све дијагонале. Тако на Интернету можете пронаћи on-line игрицу [4] (у дну веб странице), где се претпоставља услов који се односи само на главне дијагонале.

Уколико се мисли на сваку дијагоналу, то је аналогно распоређивању осам сетова од по осам краљица на шаховској табли при чему краљице истог сета не нападају једна другу. У шаху краљица напада поља у истој врсти, колони и дијагонали. Проблем осам краљица (само један сет краљица) разматрали су многи познати математичари још пре много година, укључујући и немачког математичара Карла Фридриха Гауса ($1777 - 1855$) [9]. Проблем је генерализовао на $n \times n$ табли Franc Nauk 1850. године. Нешто касније, 1874. године S. Gunther је представио метод за проналажење решења коришћењем детерминанти, а тај приступ је усавршио J.W.L. Glaisher [6]. Мора се приметити да су та решења пронађена пре ере компјутера.

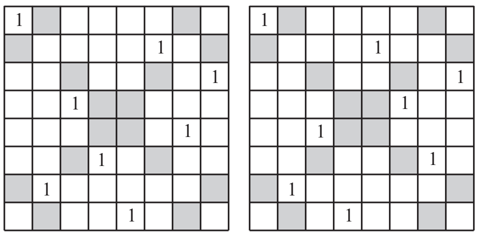
Према [5] и [8], Tom Jolly је доказао да не постоји решење за игру Hoo-Doo, али његов доказ је пун детаља.

Осам сетова од по осам краљица на табли $8x8$

Разматрање започињемо анализом решења проблема осам краљица на шаховској табли које не нападају једна другу.

Проблем осам краљица има 92 различита решења. Ако идентификујемо решења која су међусобно симетрична (решења су симетрична уколико се једно може добити ротацијом и/или рефлексијом другог), онда на шаховској табли постоји само 12 јединствених решења која су приказана на линковима [6] и [7]. Уз помоћ комбинаторике, можемо срачунати број свих могућих решења покривања шаховске табле са осам сетова од по осам краљица. Тако, добијамо $\dfrac{92!}{(92-8)!\cdot 8!)} = 93\,080\,887\,185$ могућих решења.

У овом тренутку важно је да приметимо да од 12 јединствених решења само два решења имају краљицу у углу табле и само четири решења су са краљицом на централним пољима (поља централног квадрата 2×2). Овом приликом нећемо приказати свих 12 решења, јер су она већ добро позната, већ ћемо обратити пажњу на два решења која укључују угао (слика 1).



Слика 1. Два јединствена решења проблема осам краљица која укључују угао
(поља светло сиве боје чине скуп А)

Светло сива поља су празна (без краљице) поља свих решења која се могу добити ротацијама и/или рефлексијама два приказана решења. Нека скуп A чине ова празна поља.

Корак 1. Покривање табле са четири сета од по осам краљица која укључују сва четири угла.

Ако желимо да прекријемо таблу са осам сетова краљица, прво морамо да покријемо сва четири угла са четири сета. Користећи два јединствена решења са слике 1, после извесног рачуна, можемо добити само два могућа решења покривања табле са четири краљице (исте боје) при чему су покривена сва четири угла.

1		3			2		4
	4		2	3		1	
	3		1	4		2	
2		4			1		3
4		2			3		1
	1		3	2		4	
	2		4	1		3	
3		1			4		2

1			2	3			4
	3	4			1	2	
4			3	2			1
	2	1			4	3	
	4	3			2	1	
2			1	4			3
	1	2			3	4	
3			4	1			2

Слика 2. Два могућа решења покривања табле са четири сета укључујући сва четири угла.

Ако почнемо са горњим левим углом, постоје 4 решења за покривање табле првим сетом (2 јединствена $+2$ решења добијена рефлексијама $=4$ решења). Затим постављамо краљицу другог сета у доњи десни угао. Тада постоји само шест могућих решења правилног постављања краљица првог и другог сета. Ротацијама ових шест решења за 90 степени, добијамо начине постављања сетова 3 и 4. После свих ротација и рефлексија ових шест решења добијамо опет само првих шест различитих решења. Таблу прекривамо комбиновањем 6 решења за сет 1 и 2 са 6 решења за сет 3 и 4. Постоји само $6 \cdot 6 = 36$ могућности. То можемо урадити без обимног прорачунавања. На слици 2 приказана су једина два могућа решења покривања табле са четири сета од по осам краљица која укључују сва четири угла. Светло сива поља представљају увек празна поља за та решења.

Корак 2. Покривање табле са четири сета од по осам краљица која укључују централна поља.

За прекривање табле са осам сетова, треба прекрити решења са слике 2 са четири сета од по осам краљица која укључују централна поља. Размотрићемо сва четири јединствена решења проблема осам краљица која обухватају централна поља. Она су приказана на слици 3.

					1		
		1					
						1	
	1						
			1				
							1
1							
				1			

		1					
					1		
							1
	1						
			1				
1							
						1	
				1			

	1						
					1		
1							
						1	
			1				
							1
		1					
				1			

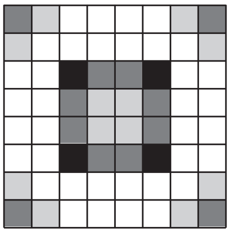
					1		
		1					
1							
							1
			1				
	1						
						1	
				1			

Слика 3. Сва четири јединствена решења проблема осам краљица која укључују централна поља (тамно сива поља су елементи скупа B)

Тамно сива поља су поља на којима нема краљице у свим решењима добијеним ротацијама и рефкексијама четири јединствена решења. Тамно сива поља представљају елементе скупа B.

Корак 3. Прекривање решења из корака 1 и корака 2.

Ако прекријемо таблу решења са слике 1 и таблу решења са слике 2, добија се фигура као на слици 4.



Слика 4. Празна поља из решења корака 1 и корака 2.

Светло сива боја показује непокривена поља из корака 1, тамно сива боја непокривена поља из корака 2, а црна боја показује поља која це увек остати празна после преклапања. Четири црна поља су елементи скупа C ($C = A \cap B$) и овај скуп није празан. Ово је доказ да проблем осам сетова од по осам краљица на шаховској табли нема решења. Немогуће је прекрити таблу 8×8 са 8 боја тако да нема две исте боје у сваком реду, колони или дијагонали. Не постоји решење које би прекрило таблу 8×8 истовремено прекривајући све углове и централна поља.

Решење које се односи само на главне дијагонале

Ако се погледа претходно решење, може се помислити да је немогуће добити решење које се односи само на главне (велике) дијагонале. Међутим, решење постоји и то више њих.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	1	2
5	6	7	8	1	2	3	4
7	8	1	2	3	4	5	6
2	1	8	7	6	5	4	3
8	7	6	5	4	3	2	1
6	5	4	3	2	1	8	7
4	3	2	1	8	7	6	5

Слика 5. Решење које се односи само на главне дијагонале.

Обратите пажњу на то како су по врстама поређани непарни бројеви (прва врста: $1, 3, 5, 7$, друга врста: $3, 5, 7, 1$, трећа врста: $5, 7, 1, 3$, и тако даље), а како парни бројеви. Са оваквом шемом такође је лако пронаћи решења за $n \in \{4, 5, 7\}$.

Пошто проблем осам сетова од по осам краљица нема решење, можемо се запитати колики је максималан број сетова (боја) који се тако могу поредати на шаховској табли? Већ знамо да је осам сетова од по осам краљица немогуће распоредити. Због симетрије шаховске табле, очигледно је да је немогуће прекрити таблу и са седам сетова. Ако је могуће прекрити са седам сетова, онда је могуће и са осам. Пошто са осам сетова то није могуће, онда није могуће ни са седам. Значи, шест је максималан број сетова од по осам краљица којим је могуће прекрити шаховску таблу.

1	5	3	7	8	2	6	4
8	4	6	2	3	5	1	7
5	3	$\boxed{7}$	1	4	$\boxed{8}$	2	6
2	6	4	8	7	1	5	3
4	7	2	5	6	3	8	1
6	1	$\boxed{8}$	3	2	$\boxed{7}$	4	5
7	2	5	4	1	6	3	8
3	8	1	6	5	4	7	2

Слика 6. Решење којим се дозвољава duplирање две боје.

Слика 6 представља то решење (наравно, ако узмемо у обзир само шест сетова, $1-6$). На истој слици је приказано и решење проблема који дозвољава дуплирање две боје. Могуће је попунити сва поља на шаховској табли уз помоћ два неутрална жетона (у овом случају боје 7 и 8 на главним дијагоналама). То је и решење игре Hoo Doo.

Закључак и примене

Pegboard проблем за $n=8$ има два решења:

1 Ако разматрате све дијагонале, тада нема решења за $n=8$. У том случају ($n=8$), проблем је аналоган истовременом прекривању шаховске табле са осам сетова од по осам краљица, а да краљице истог сета не нападају једна другу. Проблем се једноставно решава анализом решења проблема осам краљица.

2 Ако разматрате само врсте, колоне и главне дијагонале, за $n=8$, решење је могуће.

Осим тога што постављени проблем представља веома занимљиву математичку мозгалицу, он има и неке практичне примене. На пример, веома је близак проблемима организовања чувања и складиштења података у меморијама рачунара, проблемима регулисања саобраћаја [9] и тако даље.

Литература

[1] http://www.gamecatalog.org/gc/printed/gc8.pdf
[2] http://cgi.ebay.es/
[3] http://www.agpc.org/rules/all_rules_by_title.html
[4] http://www.johngrindall.com/maths/games/index.php
[5] http://home.comcast.net/ stegmann/allother.htm
[6] http://mathworld.wolfram.com/QueensProblem.html
[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle#Related_problems
[8] http://forum.johnrausch.com/cgi-bin/ultimatebb.cgi?ubb=get_topic&f=2&t=000185
[9] http://theory.cs.uvic.ca/amof/e_queeI.htm